

I) Autocuiseur

L'autocuiseur (figure 1), couramment appelé « cocotte-minute », a été inventé en 1679 par le français Denis Papin.

Il s'agit d'un dispositif de cuisson des aliments sous une pression supérieure à la pression atmosphérique. L'augmentation de pression s'accompagne d'une augmentation de la température maximale atteinte, ce qui accélère la cuisson des aliments. Une soupape permet de limiter la pression intérieure en évacuant la vapeur d'eau formée et assure une cuisson à température constante.

L'autocuiseur contient toujours un peu d'eau en plus des aliments à cuire. La cuisson se déroule alors en trois étapes :

- un régime transitoire de montée en pression (et en température) du contenu de l'autocuiseur ;
- un régime de cuisson durant lequel la pression et la température de la vapeur d'eau restent constantes (la vapeur qui s'échappe par la soupape est compensée par la vaporisation de l'eau contenue dans l'autocuiseur) ;
- une décompression, souvent rapide, pour arrêter la cuisson.



FIGURE 1 – Autocuiseur

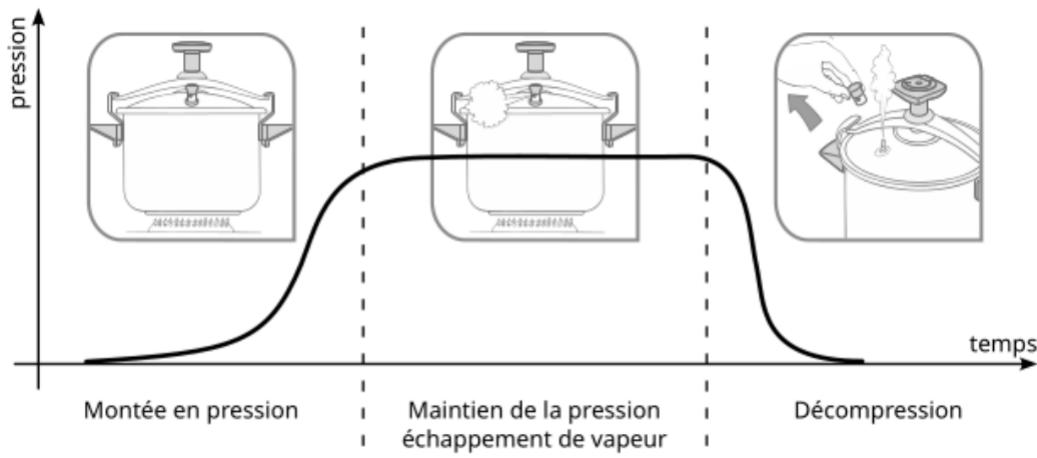


FIGURE 2 – Étapes de cuisson dans un autocuiseur

I.1) La soupape

I.1.a) Masse de la soupape

La soupape d'échappement de la vapeur est un cylindre de masse m placé sur le couvercle de l'autocuiseur. Elle peut coulisser verticalement sans frottement sur un cylindre creux qui fait communiquer l'intérieur de l'autocuiseur avec l'extérieur (figure 3).

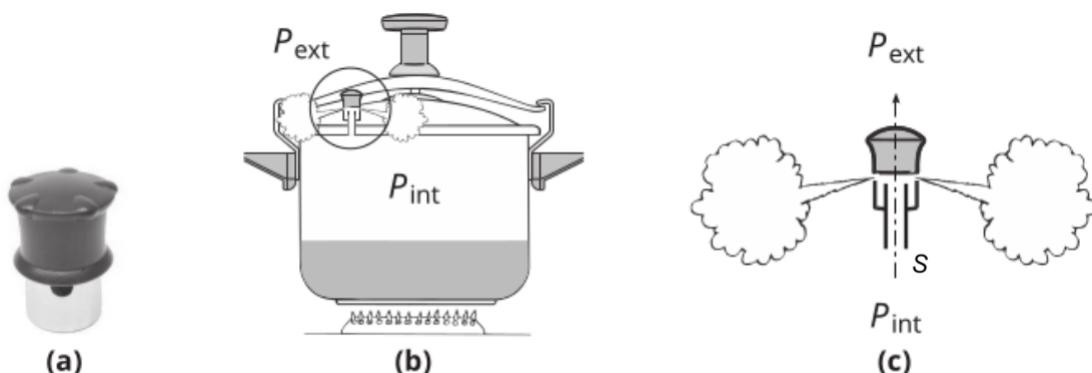


FIGURE 3 – Schéma de fonctionnement de la soupape d'échappement

Lorsque la pression augmente dans l'autocuiseur, la soupape monte, ce qui permet à la vapeur de s'échapper. En régime permanent, la soupape reste à hauteur constante (figure 3c) et est en équilibre sous l'effet de son poids et des forces de pression.

La pression extérieure vaut $P_{\text{ext}} = 1,01 \times 10^5 \text{ Pa}$. On note P_{int} la pression à l'intérieur de l'autocuiseur.

La soupape est pesée sur une balance de cuisine (figure 4a) dont un extrait de la notice est donné (figure 4b).



(a)

Caractéristiques particulières

- Gamme de pesée : 10 g à 5 kg, avec une précision de mesure de l'ordre de 1 gramme.

(b)

FIGURE 4 – Balance de pesée

- En tenant compte de l'indication de précision mentionnée par la notice de la balance, écrire la valeur numérique de la masse m de la soupape. L'évaluation de son incertitude-type associée serait-elle de type A ou de type B ? Aucun calcul d'incertitude n'est demandé par la suite.

Correction

Masse de la soupape par lecture graphique :

$$m = (39 \pm 1) \text{ g} \quad \text{ou} \quad m = \left(39 \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \text{ g} \quad \text{ou} \quad m = \left(39 \pm \frac{0,5}{\sqrt{3}} \right) \text{ g}$$

selon les appréciations. C'est une incertitude de type B, car une incertitude de lecture et pas statistique.

I.1.b) Équilibre de pression

La section du conduit cylindrique d'évacuation de la vapeur vaut $S = 7,00 \text{ mm}^2$. Des indications de pression et le volume de l'autocuiseur sont gravés sur celui-ci (figure 5).

On note $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ la valeur du champ de pesanteur.

- Représenter, à l'équilibre, la soupape et les trois forces qui s'exercent sur elle.

Correction

Schéma des forces.

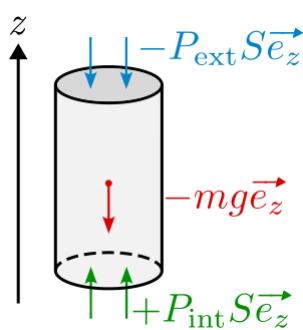


FIGURE 5 – Indications sur l'autoclave

- Déterminer l'expression littérale de P_{int} en fonction de P_{ext} , m , g et de S . Déterminer la valeur numérique de P_{int} .

Correction

À l'équilibre, la somme des forces exercées sur la soupape est nulle.

$$P_{\text{int}}S - P_{\text{ext}}S - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad P_{\text{int}} = P_{\text{exp}} + \frac{mg}{S} = 1,55 \times 10^5 \text{ Pa}$$

4) L'une des indications gravées sur l'autocuiseur permet-elle de confirmer ce résultat ? À quoi correspond vraisemblablement l'autre indication de pression ?

Correction

En lisant les indications, on peut deviner les significations suivantes :

- PS est la pression « standard » égale à 1 bar ou 100 kPa
- PF est la « surpression » possible avec l'autocuiseur 55 kPa
- On retrouve : $P_{\text{int}} = PS + PF = 55 \text{ kPa}$

I.2) Mesures dans l'autocuiseur et exploitation

On verse un volume $V_e = 1,00 \text{ L}$ d'eau dans l'autocuiseur que l'on ferme et que l'on place sur une plaque chauffante délivrant la puissance thermique $\mathcal{P}_{th} = 1,50 \text{ kW}$.

Des capteurs placés dans l'autocuiseur permettent d'enregistrer la température de l'eau, la température de la phase vapeur ainsi que la pression de la phase vapeur au cours du temps (figure 6).

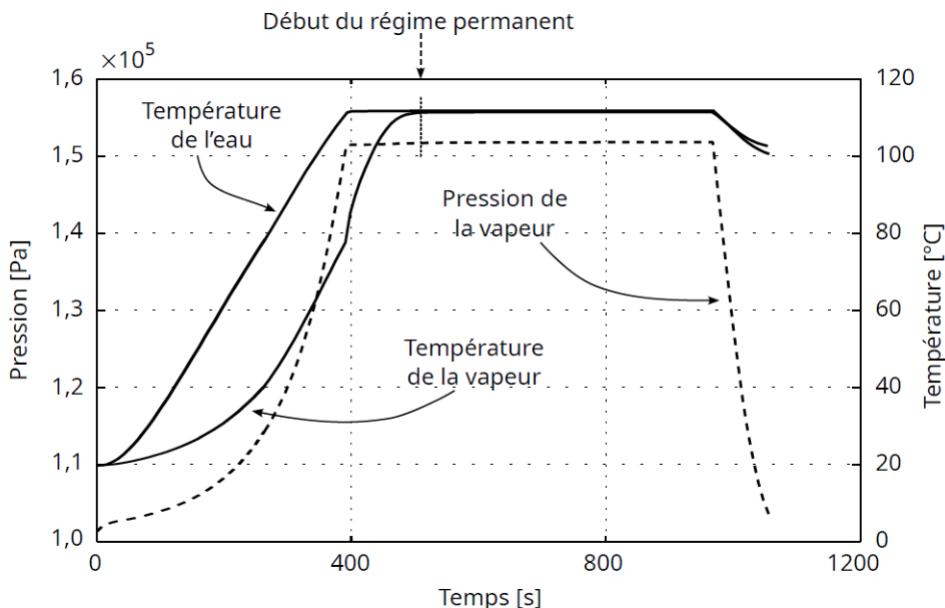


FIGURE 6 – Mesure de températures et de pression dans l'autocuiseur

On note :

- m_e la masse de l'eau,
- $c_e = 4,18 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ la capacité thermique massique de l'eau,
- $C_a = 1,23 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1}$ la capacité thermique de l'autocuiseur.

L'eau et l'autocuiseur sont constamment à la même température et on note T_i leur température initiale.

I.2.a) Premier modèle

Dans un premier temps, on suppose que toute la puissance thermique \mathcal{P}_{th} est transférée à l'autocuiseur et à l'eau.

5) Relever sur la figure 6 la température initiale T_i .

Correction

On lit graphiquement $T_i = 20 \text{ }^{\circ}\text{C}$

6) On note Δt la durée au bout de laquelle l'eau et l'autocuiseur atteignent la température $T_f = 100 \text{ }^{\circ}\text{C}$. Déterminer l'expression littérale de la durée Δt en fonction de m_e , c_e , C_a , T_f , T_i et de \mathcal{P}_{th} . Déterminer la valeur numérique de Δt .

Correction

Par un bilan énergétique sur l'ensemble { autocuiseur + eau }

$$\Delta H_{\text{syst}} = \mathcal{P}_{\text{th}} \Delta t \Rightarrow (C_a + m_e c_e) (T_f - T_i) = \mathcal{P}_{\text{th}} \Delta t \Rightarrow \boxed{\Delta t = \frac{(C_a + m_e c_e) (T_f - T_i)}{\mathcal{P}_{\text{th}}} = 289 \text{ s}}$$

7) Cette durée est-elle compatible avec les données de la figure 6 ? Si non, donner deux arguments permettant de justifier cet écart.

Correction

Sur le graphique, on lit un temps de montée en température un peu plus long : $\Delta t = 350 \text{ s}$. On peut probablement l'expliquer par :

- o les pertes du chauffage de la plaque qui chauffent également l'air et les meubles alentours
- o le transfert de chaleur de l'autocuiseur vers l'air extérieur plus froid
- o la non prise en compte de l'air intérieur à l'autocuiseur à chauffer également

I.2.b) Second modèle

Dans un second temps, on tient compte des pertes thermiques de l'autocuiseur vers son environnement au cours du temps sous la forme d'une puissance thermique de fuite $\mathcal{P}_f = k [T(t) - T_{\text{ext}}]$ où k et T_{ext} sont des constantes.

8) En effectuant un bilan thermique sur le système { eau + autocuiseur } pendant l'intervalle de temps infinitésimal dt , montrer que la température du système satisfait l'équation différentielle :

$$\frac{dT}{dt} + \frac{T - T_{\text{ext}}}{\tau} = \frac{\mathcal{P}_{\text{th}}}{\tau k} \quad (1)$$

et déterminer l'expression de τ en fonction de m_e , c_e , C_a et de k .

Correction

Bilan thermique sur l'ensemble { autocuiseur + eau } avec puissance de fuite :

$$dH_{\text{syst}} = \mathcal{P}_{\text{th}} dt - \mathcal{P}_f dt \Rightarrow (C_a + m_e c_e) dT = (\mathcal{P}_{\text{th}} - \mathcal{P}_f) dt \Rightarrow \boxed{\tau = \frac{C_a + m_e c_e}{k}}$$

9) On cherche une solution de l'équation 1 sous la forme $T(t) = A + B e^{-t/\tau}$. Déterminer les expressions littérales de A et de B en fonction des paramètres de l'équation 1.

Correction

On identifie la solution particulière :

$$\boxed{A = T_{\text{ext}} + \frac{\mathcal{P}_{\text{th}}}{k}}$$

On déterminer B à l'aide des conditions initiales :

$$T(0) = T_{\text{ext}} = A + B \Rightarrow \boxed{B = -\frac{\mathcal{P}_{\text{th}}}{k}}$$

Le tracé de la solution de l'équation 1 est présenté sur la figure 7.

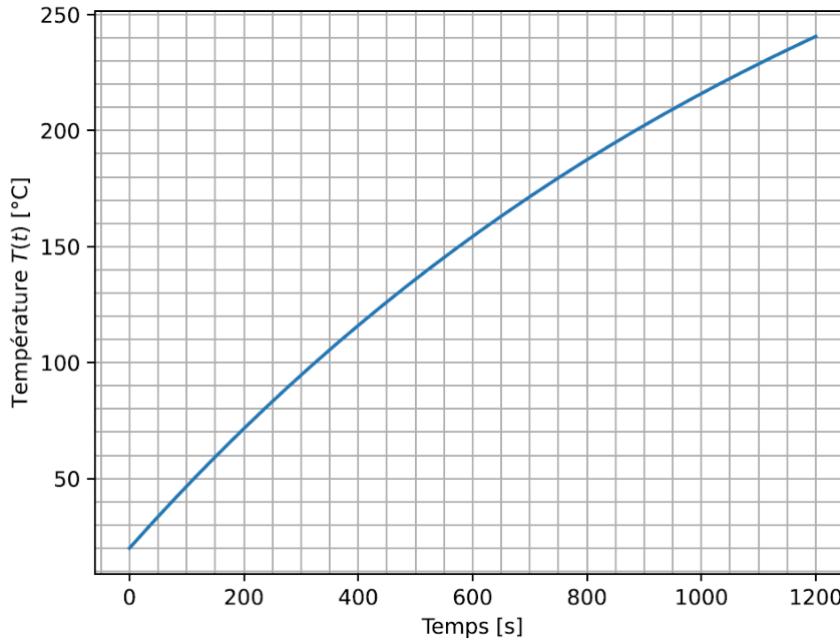


FIGURE 7 – Évolution de la température intérieure en fonction du temps

- 10) Déduire de la figure 7 la durée $\Delta t'$ nécessaire pour atteindre la température $T_f = 100$ °C. Le résultat est-il cohérent avec la durée Δt trouvée précédemment ? Justifier. Le résultat est-il satisfaisant ? Justifier.

Correction

Par lecture graphique, il faut $\Delta t' = 325$ s pour atteindre les 100 °C. Ce résultat est du même ordre de grandeur que Δt précédemment trouvé mais plus grand, et donc plus proche de la valeur réelle. C'est assez logique puisque l'on a tenu compte d'une partie des pertes qui ralentissent le chauffage de l'autocuiseur (mais pas de toutes).

I.2.c) Augmentation de la vitesse de cuisson

On observe sur la figure 6 qu'au-delà de 500 s, le régime permanent de cuisson est atteint. On note T_p la température de cuisson et P_p la pression de cuisson en régime permanent.

- 11) Relever sur la figure 6 la température de cuisson T_p et la pression de cuisson P_p en régime permanent.

Correction

On relève sur le graphique : $T_p = 110$ °C, $P_p = 1,52 \times 10^5$ Pa.

- 12) Préciser la raison thermodynamique pour laquelle la température et la pression sont devenues constantes.

Correction

La coexistence des deux phases liquide et vapeur impose un palier de température et de pression de changement d'état.

La pression de vapeur saturante de l'eau dépend de la température, comme le montre la figure 8.

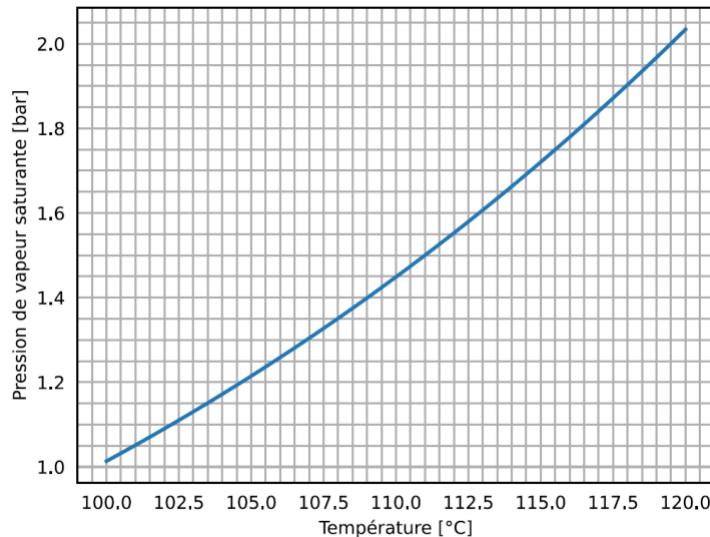
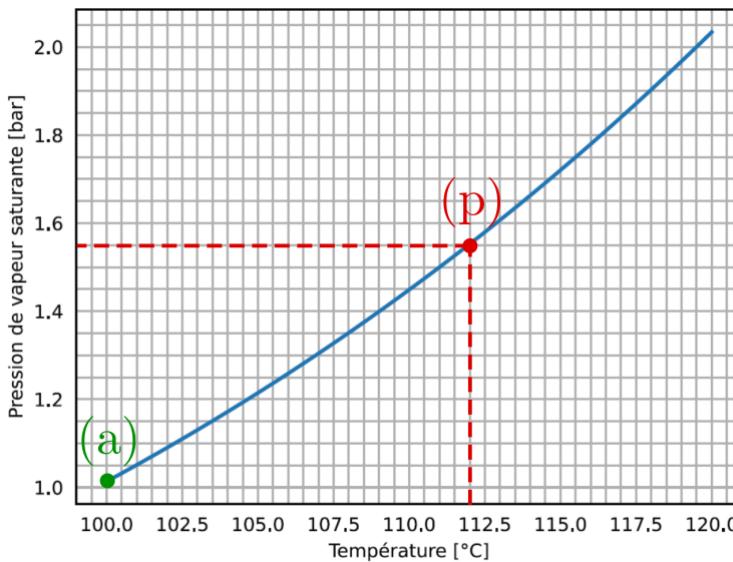


FIGURE 8 – Évolution de la pression de vapeur saturante en fonction de la température

13) Reproduire cette courbe sur votre copie en y positionnant :

- o le point de cuisson en régime permanent dans un autocuiseur (T_p, P_p);
- o le point de cuisson à ébullition sous pression ambiante (T_a, P_a) (qui correspond par exemple à la cuisson de pâtes dans une casserole d'eau bouillante).

Correction



La figure 9 donne le facteur de vitesse de la cuisson en fonction de la température de cuisson. La référence est prise à 100 °C. Par exemple, une cuisson à 80 °C a un facteur de cuisson de 0,25 et est donc quatre fois plus lente qu'à 100 °C.

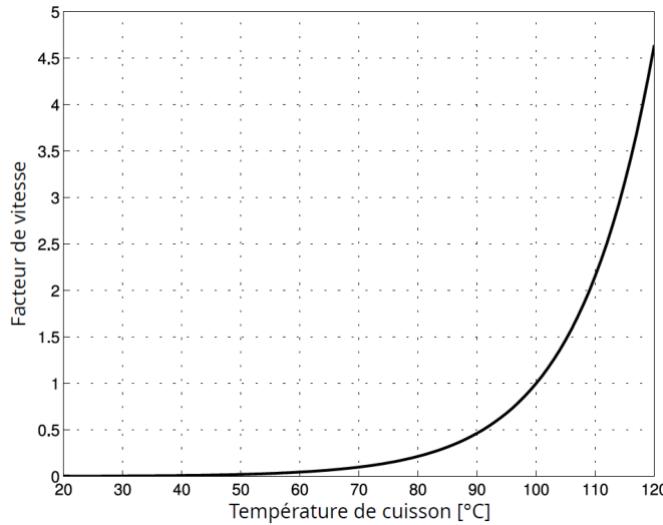


FIGURE 9 – Évolution du facteur de cuisson en fonction de la température

- 14) Sachant que la cuisson de légumes dans une casserole d'eau bouillante à l'air libre s'est faite en 20 minutes, estimer la durée nécessaire à la cuisson de la même quantité de légumes dans un autocuiseur.

Correction

Avec $T_p = 112^\circ\text{C}$, on lit un facteur de cuisson d'environ 2,5. Donc si une cuisson standard prend 20 minutes, la cuisson avec l'autocuiseur prendra environ $\frac{20}{2,5} = 8$ minutes.

I.2.d) Estimation du débit de vapeur

Lorsque l'autocuiseur fonctionne en régime permanent, la puissance thermique de la plaque chauffante est réduite à $\mathcal{P}_{th} = 600 \text{ W}$. Un jet de vapeur d'eau s'échappe continûment par la soupape.

La puissance fournie par la plaque chauffante sert en partie à vaporiser l'eau présente dans l'autocuiseur et est en partie perdue, les pertes étant de l'ordre de $\mathcal{P}_f = 350 \text{ W}$.

On admet que la quantité d'eau vaporisée pendant la cuisson reste suffisamment faible pour considérer le volume d'eau liquide présent dans l'autocuiseur comme constant et égal à $V_e = 1,00 \text{ L}$ (hypothèse \mathcal{H}).

On suppose que le gaz présent dans l'autocuiseur est uniquement constitué de vapeur d'eau. Dans les conditions de cuisson, l'enthalpie massique de vaporisation de l'eau vaut $\Delta_{\text{vap}}h = 2,23 \text{ MJ} \cdot \text{kg}^{-1}$

- 15) Expliquer pourquoi il apparaît des gouttelettes d'eau liquide dans le jet de vapeur à sa sortie par la soupape.

Correction

Le jet de vapeur qui sort de la soupape est chaud. Au contact de l'air extérieur plus froid, l'eau se condense en micro-gouttelettes d'eau.

- 16) Déterminer, à l'aide d'un bilan enthalpique, le débit massique du jet de vapeur d'eau en $\text{mg} \cdot \text{s}^{-1}$.

Correction

Avec les hypothèses de l'énoncé, de régime stationnaire établi et que le volume d'eau liquide dans l'autocuiseur est constant, on peut considérer que le débit massique de vapeur qui s'échappe correspond à la masse d'eau liquide vaporisée par seconde grâce au apport thermique. Bilan enthalpique sur un intervalle élémentaire dt :

$$dH_{\text{syst}} = \mathcal{P}_{th}dt - \mathcal{P}_f dt \Rightarrow dm \times \Delta_{\text{vap}}h = (\mathcal{P}_{th} - \mathcal{P}_f) dt \Rightarrow D_m = \frac{dm}{dt} = \frac{\mathcal{P}_{th} - \mathcal{P}_f}{\Delta_{\text{vap}}h} = 112 \text{ mg} \cdot \text{s}^{-1}$$

- 17) En déduire la masse d'eau perdue dans le jet pour une cuisson de 10 minutes. L'hypothèse \mathcal{H} est-elle toujours vérifiée sur des durées de cuisson usuelles de 30 minutes ?

Correction

Masse d'eau perdue en 10 minutes : $D_m \times 10 \text{ min} = 67 \text{ g}$

Masse d'eau perdue en 30 minutes : $D_m \times 30 \text{ min} = 202 \text{ g}$

Pour 30 minutes de cuisson, la masse d'eau perdue correspond à un volume d'environ 0,2 L, ce qui correspond à un

cinquième de la quantité initiale. L'hypothèse de conservation du volume d'eau n'est donc plus valable à cette échelle de temps.

II) Expérience de Rüchardt

Ce sujet propose une étude de l'expérience de Rüchardt. Elle consiste à placer un gaz dans un récipient étanche muni d'un tube (figure 10). On ferme le tout par un piston qui peut librement coulisser dans le tube. Le diamètre du piston est du mieux possible égal à celui du tube, ce qui assure une étanchéité (pas de fuite de gaz).

Sous l'action de son poids, le piston commence à descendre. Ceci fait augmenter la pression dans le récipient, ce qui finit par arrêter la descente du piston, et par le faire remonter. Il s'en suit une série d'oscillations, comme on peut le voir sur la figure 11.

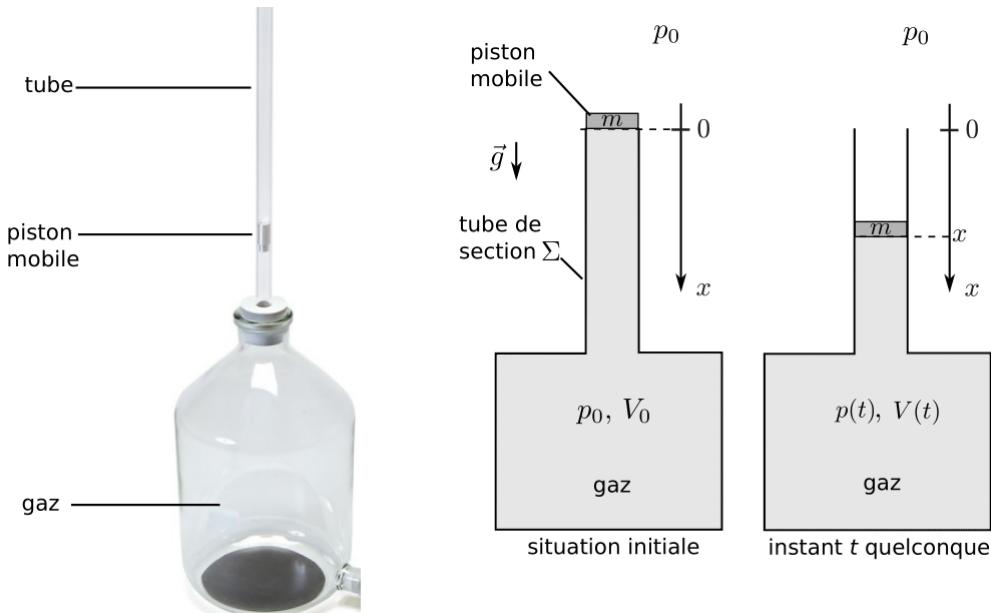


FIGURE 10 – Photographie et schéma de l'expérience

Proposée par Rüchardt en 1929, perfectionnée à plusieurs reprises, cette expérience et ses variantes ont permis des mesures extrêmement précises du coefficient adiabatique γ de divers gaz (aucune connaissance sur γ n'est nécessaire). Pour le gaz utilisé dans l'expérience, la valeur théorique est $\gamma = 1,4$.

Formulaire :

$$(1+z)^a \simeq 1 + az \quad \text{avec : } z \ll 1$$

II.1) Détermination de la période des oscillations

On utilise les notations de la figure 10. En particulier :

- V_0 est le volume initial de l'ensemble du gaz (récipient + partie dans le tube sous le piston).
- $V(t)$ est le volume de ce même gaz, mais à un instant t quelconque. La pression du gaz est notée $P(t)$ et sa température $T(t)$.
- La pression atmosphérique est P_0 . C'est aussi la pression dans le récipient à l'instant initial.
- La section du tube est notée Σ .
- La masse du piston est m et l'intensité de la pesanteur est g .
- \vec{e}_x est un vecteur unitaire descendant.

On admet que la résultante des forces de pression qui s'exercent sur le piston s'écrit :

$$\vec{F}_p = [P_0 - P(t)] \Sigma \vec{e}_x$$

On fait finalement l'hypothèse qu'il n'y a aucun échange thermique entre le gaz et le milieu extérieur (parois parfaitement isolante thermiquement). On dit que le gaz évolue de manière adiabatique. Dans ce cas, la loi de Laplace (admise) affirme que :

$$P(t) \times V^\gamma(t) = P_0 \times V_0^\gamma$$

18) Établir la relation entre $V(t)$, V_0 , la section Σ et l'abscisse x du piston (telle que définie sur la figure 10).

Correction

En remarquant que le volume $V(t)$ du gaz enfermé diminue à mesure que x augmente, on a directement :

$$V(t) = V_0 - \Sigma x$$

19) En utilisant la loi de Laplace et un développement limité valable pour $\Sigma x \ll V_0$, montrer que la résultante des forces de pression qui s'exercent sur le piston se met sous la forme :

$$\vec{F}_p = -\gamma kx \vec{e}_x$$

avec k une constante à exprimer en fonction des données du problème.

Correction

D'après la loi de Laplace :

$$P(t) = P_0 \times \left(\frac{V_0}{V(t)} \right)^\gamma = P_0 \times \left(\frac{V_0}{V_0 - \Sigma x} \right)^\gamma = P_0 \times \left(1 - \frac{\Sigma x}{V_0} \right)^{-\gamma} \simeq P_0 \times \left(1 + \gamma \frac{\Sigma x}{V_0} \right)$$

On en déduit :

$$\vec{F}_p = [P_0 - P(t)] \Sigma \vec{e}_x \simeq -\gamma kx \vec{e}_x \quad \text{avec : } k = \frac{P_0 \Sigma^2}{V_0}$$

II.1.a) Méthode de Rüchardt

En plus de \vec{F}_p , la seule autre force prise en compte comme agissant sur le piston est la force de pesanteur.

20) À l'aide d'une étude mécanique, établir une équation différentielle portant sur $x(t)$. L'écrire sous une forme canonique en faisant intervenir la pulsation propre ω_0 . Donner l'expression de ω_0 en fonction de k , γ et m .

Correction

On applique le PFD sur lamasse dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. On projette le PFD selon \vec{e}_x .

$$\ddot{x} = mg - \gamma kx \Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = g \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{\gamma k}{m}}$$

21) Établir l'expression de la solution $x(t)$ de cette équation différentielle, en fonction de ω_0 , t , m , g , γ , k , ainsi que de deux constantes A et B qu'on ne cherchera pas à déterminer.

Correction

La solution s'écrit :

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + \frac{g}{\omega_0^2}$$

22) Pour l'expérience considérée ici, $\frac{m}{k} = 4,01 \times 10^{-2} \text{ s}^2$. On mesure une période des oscillations $T_0 = 1,08 \text{ s}$. Déterminer la valeur de γ trouvée expérimentalement.

Correction

On a :

$$\omega_0^2 = \left(\frac{2\pi}{T_0} \right)^2 = \frac{\gamma k}{m} \Rightarrow \gamma = \frac{m}{k} \left(\frac{2\pi}{T_0} \right)^2 = 1,36$$

II.1.b) Méthode de Rinkel

Une seconde méthode, exploitée par Rinkel en 1929, consiste à mesurer la distance maximale L parcourue par le piston avant qu'il ne remonte pour la première fois. Le piston est lâché en $x = 0$ sans vitesse initiale. On utilise ici une méthode énergétique afin de déterminer l'expression de L .

23) Donner, en faisant intervenir les grandeurs m , g , x et \dot{x} , les expressions de l'énergie cinétique \mathcal{E}_c du piston et de son énergie potentielle de pesanteur \mathcal{E}_{pp} .

Correction

On a :

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}m\dot{x} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_{pp} = -mgx$$

Il y a un signe moins car l'axe Ox est descendant.

24) Déterminer l'expression de l'énergie potentielle \mathcal{E}_{pf} associée à la force : $\vec{F}_p = -\gamma kx \vec{e}_x$.

Correction

Le lien entre une force et son énergie potentielle est :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}(\mathcal{E}_p) \Rightarrow \vec{F}_p = -\frac{d\mathcal{E}_{pf}}{dx} \vec{e}_x \Rightarrow -\gamma kx = -\frac{d\mathcal{E}_{pf}}{dx} \Rightarrow \mathcal{E}_{pf} = \frac{1}{2}\gamma kx^2 + cte$$

25) Déterminer par une méthode énergétique l'expression de la distance L en fonction de g , k , γ et m .

Correction

On applique le théorème de l'énergie mécanique entre l'instant initial (vitesse nulle) et l'instant où la masse fait demi tour (vitesse nulle).

$$\Delta\mathcal{E}_m = 0 \Rightarrow 0 = -mgL + \frac{1}{2}\gamma kL^2 \Rightarrow L = \frac{2mg}{\gamma k}$$

II.2) Étude mécanique avec frottements

Un pointage vidéo réalisé sur une expérience est montré sur la figure 11. L'amortissement de la courbe $x(t)$ montre qu'il y a présence de dissipation (frottements solides ou fluides, échanges thermiques, non uniformité de la pression, amortissement d'ondes acoustiques...). L'objectif de cette partie est de modéliser cette courbe, sans chercher à comprendre le détail du processus de dissipation.

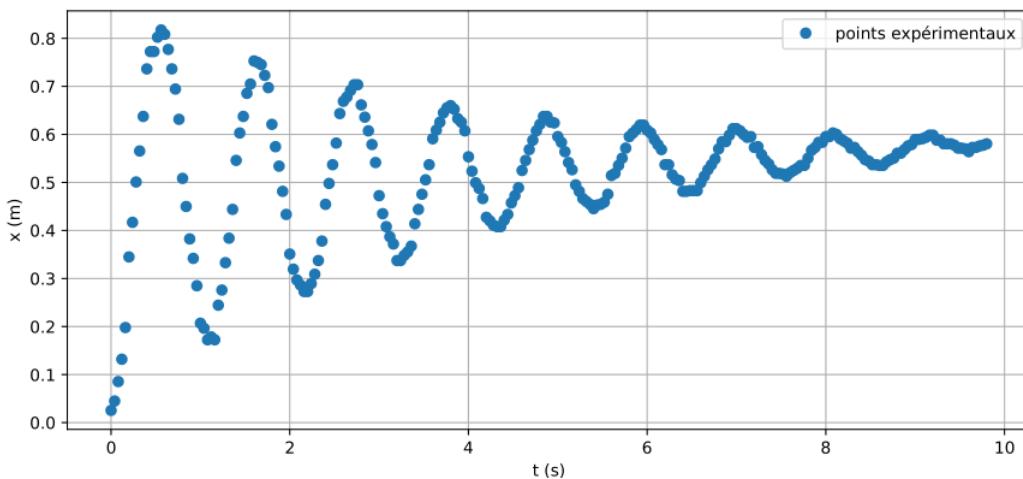


FIGURE 11 – Données issues d'un pointage vidéo. L'échelle des x est approximative, celle des t est précise.

Nous supposons que l'équation du mouvement du piston s'écrit sous la forme suivante, et nous allons tester si ceci permet une description correcte de l'enregistrement $x(t)$:

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = g$$

La pulsation propre de ce système est ω_0 , son expression théorique reste la même que précédemment. Le facteur de qualité Q traduit la présence plus ou moins forte de dissipation. Le second membre g est constant.

26) En vous aidant de la figure 11, et sans faire de calculs, donner en justifiant une valeur approchée de Q . Comment se nomme le type de régime dans lequel se trouve le système ?

Correction

Le nombre d'oscillations du système avant de revenir à l'équilibre permet de donner une valeur approchée du facteur de

qualité. Ainsi, $Q \simeq 10$. Le système est dans un régime pseudo-périodique.

On écrit la forme générale des solutions de l'équation homogène ainsi :

$$x_H(t) = [A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)] e^{-\mu t} \quad \text{avec : } \mu = \frac{\omega_0}{2Q} \quad \text{et} \quad \Omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

27) Donner la forme générale des solutions $x(t)$.

Correction

La forme générale des solutions s'écrit :

$$x(t) = [A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)] e^{-\mu t} + \frac{g}{\omega_0^2}$$

28) On suppose que la masse est lâchée en $x = 0$ sans vitesse initiale. Déterminer alors les expressions des constantes A et B en fonction de Ω , μ , ω_0 et g . Tracer l'allure de la solution $x(t)$.

Correction

Les conditions initiales imposent :

$$x(0) = 0 = A + \frac{g}{\omega_0^2} \Rightarrow A = -\frac{g}{\omega_0^2}$$

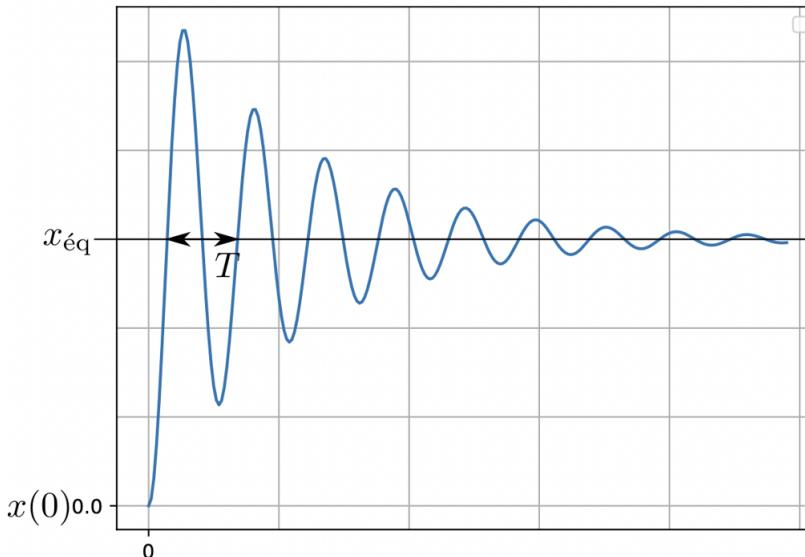
et

$$\dot{x}(0) = 0 = -\mu A + \Omega B \Rightarrow B = -\frac{g}{\omega_0^2} \times \frac{\mu}{\Omega}$$

Ainsi,

$$x(t) = \frac{g}{\omega_0^2} - \frac{g}{\omega_0^2} \left[\cos(\Omega t) + \frac{\mu}{\Omega} \sin(\Omega t) \right] e^{-\mu t}$$

Graphe :



29) Y a-t-il une différence significative entre la période propre T_0 et la pseudo-période T ? Justifier.

Correction

On a :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad \text{et} \quad T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \Rightarrow \frac{T_0}{T} = \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \simeq 0,999 \quad \text{avec : } Q \simeq 10$$

Il n'y a donc pas de différence significative.

30) Un modèle des données est représenté figure 12. En utilisant une de vos expressions précédentes, et les valeurs numériques en légende de la figure, en déduire une valeur approchée de Q .

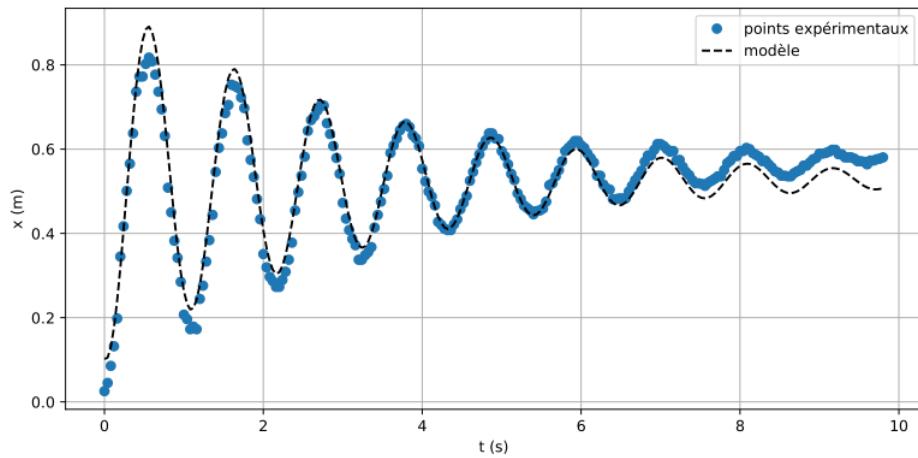


FIGURE 12 – Données et modèle du type $C + [A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)] e^{-\mu t}$. Le programme retourne, en unité cohérente SI : $\Omega = 5,83$, $\mu = 0,30$, $A = -0,43$, $B = -0,059$ et $C = 0,53$.

Correction

D'après la question précédente, $\omega_0 \simeq \Omega$. Ainsi,

$$\mu = \frac{\omega_0}{2Q} = \simeq \frac{\Omega}{2Q} \quad \Rightarrow \quad Q = \frac{\Omega}{2\mu} = 9,7$$

- 31) Un second modèle, présenté figure 13, est en meilleur accord avec les données. Proposer une cause physique possible à l'existence du terme supplémentaire en Dt .

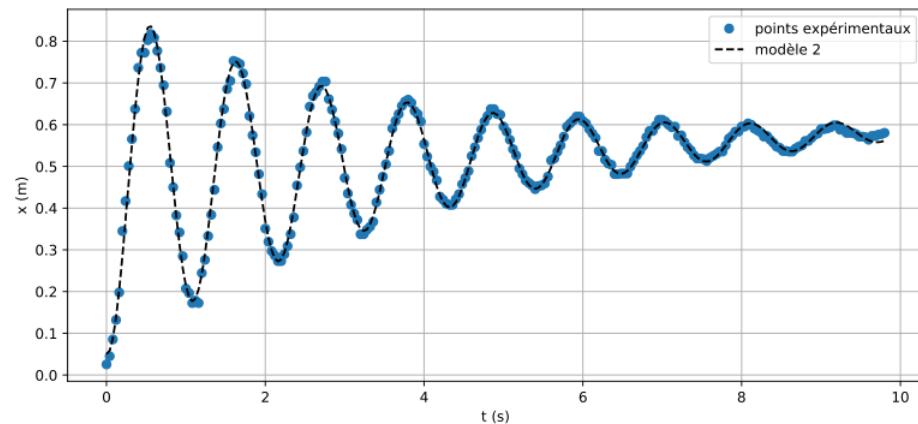


FIGURE 13 – Données et modèle du type $C + [A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)] e^{-\mu t} + Dt$. Le programme retourne, en unité cohérente SI : $\Omega = 5,82$, $\mu = 0,29$, $A = -0,42$, $B = -0,037$, $C = 0,47$ et $D = 0,011$.

Correction

On peut envisager comme cause physique la non-adiabaticité de la transformation : il existe en réalité des échanges thermiques entre le gaz enfermé et le milieu extérieur, qui pourrait expliquer cette dérive linéaire en t .

III) DéTECTEUR DE MÉTAUX

Les détecteurs de métaux sont des instruments électroniques capables d'indiquer la présence de masses métalliques de nature et de taille différentes. Les détecteurs fixes sont utilisés dans les aéroports, dans l'industrie agro-alimentaire ou pharmaceutique, sur les réseaux routiers, etc. Les détecteurs mobiles peuvent servir à localiser et suivre le cheminement de canalisations enterrées ou de fils électriques, à aider aux fouilles archéologiques, à repérer des engins dangereux, etc.

III.1) Oscillations libres d'un circuit RLC série

L'élément déterminant du détecteur de métal est la bobine, indispensable à la détection, qui est utilisée dans un montage oscillateur. L'étude du fonctionnement de l'oscillateur va nous permettre de déterminer les caractéristiques de la bobine.

On réalise un circuit RLC série dont le schéma de principe est donné sur la figure 14. Il est constitué :

- d'un générateur basse fréquence (GBF), de résistance interne R_g et de force électromotrice $e(t)$;
- d'une résistance variable R , de valeur comprise entre 0Ω et $10,0 \text{ k}\Omega$;
- d'un condensateur de capacité variable C , de valeur comprise entre $0,01 \mu\text{F}$ et $1,00 \mu\text{F}$;
- d'une bobine réelle d'inductance L et de résistance r inconnues.

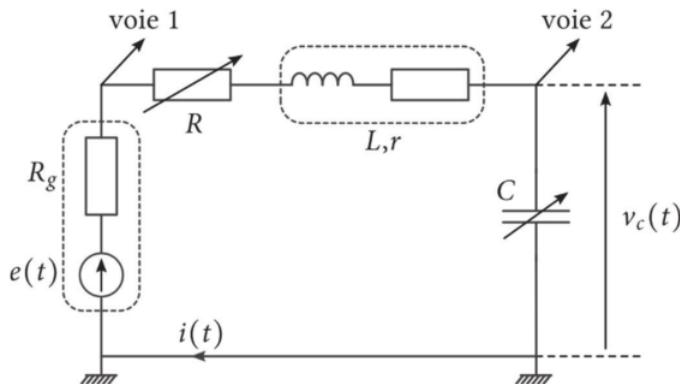


FIGURE 14 – Circuit RLC série

On pose :

- $R_t = R + R_g + r$ la résistance totale du circuit ;
- $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ sa pulsation propre ;
- $Q = \frac{L\omega_0}{R_t} = \frac{1}{R_t} \sqrt{\frac{L}{C}}$ le facteur de qualité correspondant.

32) Montrer que l'équation différentielle satisfait par la tension v_c aux bornes du condensateur se met sous la forme :

$$\frac{d^2v_c}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dv_c}{dt} + \omega_0^2 v_c(t) = \omega_0^2 e(t)$$

Correction

La loi des mailles s'écrit :

$$e(t) = v_c + R_t i + L \frac{di}{dt} \quad \text{avec : } i = C \frac{dv_c}{dt}$$

Ce qui donne bien l'équation demandée.

On suppose que $Q > \frac{1}{2}$.

33) En régime libre $e(t) = 0$, montrer que la pseudo-période T des oscillations peut s'écrire $T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$ et déterminer l'expression littérale de T_0 .

Correction

Pour $Q > 1/2$ les racines de l'équation caractéristique sont complexes $r = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$. On en déduit la pseudo pulsation et la pseudo-période :

$$\Omega = \omega \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \quad \text{avec : } T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}$$

34) En déduire que l'on peut écrire $T^2 = \frac{aC}{1 - bC}$ et exprimer a et b en fonction des caractéristiques du circuit.

Correction

Si l'on remplace Q et T_0 par leurs expressions, on trouve bien $T^2 = \frac{aC}{1-bC}$ avec $a = 4\pi^2L$ et $b = \frac{R_t^2}{4L}$

La pseudo-période a été mesurée pour différentes valeurs de la capacité C ; la fonction T^2 a été tracée en fonction de C . Une modélisation affine a été superposée à ces données.

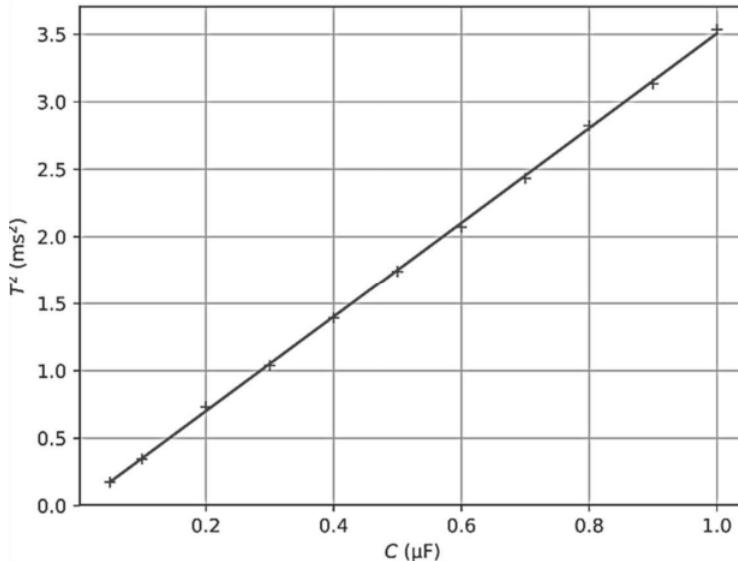


FIGURE 15 – Carré de la pseudo-période en fonction de la capacité. Modélisation affine : coefficient de corrélation 0,999 ; ordonnée à l'origine $-3,0 \times 10^{-9}$ SI; pente 3,3 SI.

35) En déduire la valeur de l'inductance de la bobine en expliquant la démarche et en justifiant d'éventuelles approximations.

Correction

La modélisation affine semble cohérente avec les données expérimentales (d'après le coefficient de corrélation, même si celui-ci n'est pas toujours un bon indicateur), ce qui suppose que $bC \ll 1$, alors $T^2 \simeq aC$. La pente obtenue donne L :

$$4\pi^2 L = 3,3 \text{ SI} \Rightarrow L = 83,6 \text{ mH}$$

L'hypothèse sur b est valable si et seulement si $R_t \ll 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 2,60 \text{ k}\Omega$.

On appelle résistance critique totale, $R_{ct} = R_c + R_g + r$, la valeur de la résistance totale du circuit permettant d'atteindre le régime critique, la résistance R_c étant simplement appelée résistance critique. Aucune hypothèse n'est faite sur la valeur de Q .

36) Montrer que la résistance critique totale vaut $R_{ct} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$.

Correction

Le régime critique s'obtient pour un discriminant nul, soit $Q = 1/2$. Alors $R_{ct} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$.

Tous les autres paramètres étant fixés, la réponse du circuit à un échelon de tension donne lieu à différents régimes selon la valeur de la résistance variable R . En voie 1 de l'oscilloscope, l'échelon de tension ; en voie 2, la tension aux bornes du condensateur, on superpose les réponses du circuit.

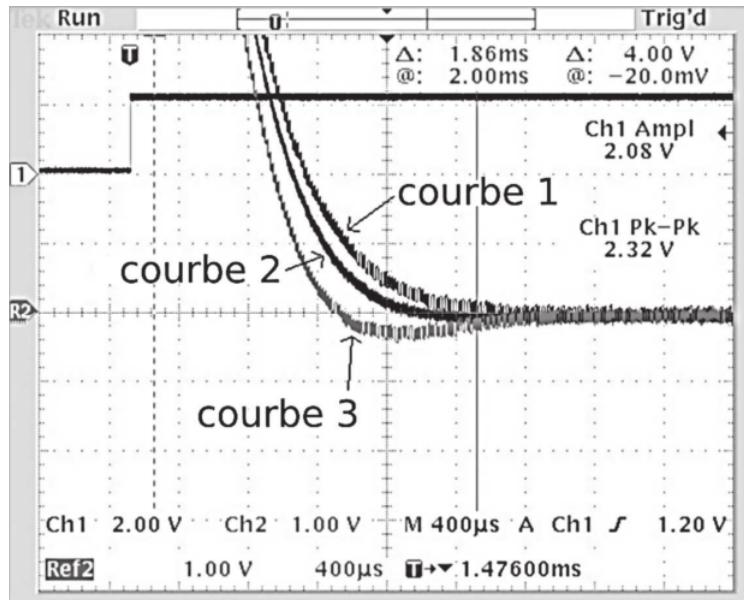


FIGURE 16 – Superposition des réponses du circuit (tension aux bornes du condensateur) soumis à un échelon de tension, pour trois valeurs différentes de R .

- 37) Identifier et nommer les trois régimes associés aux courbes 1, 2 et 3 de la figure 16.

Correction

On remarque que la courbe 1 est un régime apériodique (monotone), la courbe 3 un régime pseudo-périodique (avec dépassement), donc la courbe 2 est le régime critique car il est le plus rapide des trois.

III.2) Oscillateur quasi-sinusoidal

III.2.a) Montage à résistance négative

Les pertes par effet Joule empêchent le maintien des oscillations libres du circuit RLC. Afin de les entretenir, le montage doit comporter une source d'énergie. Celle-ci est apportée par un amplificateur linéaire intégré, ou ALI, qui est un composant électronique dont l'alimentation ne sera pas représentée et dont le fonctionnement idéal est décrit lorsqu'il est nécessaire. En plus de l'ALI, le montage étudié (figure 17) comporte 3 résistances dont une variable, la résistance R_3 .

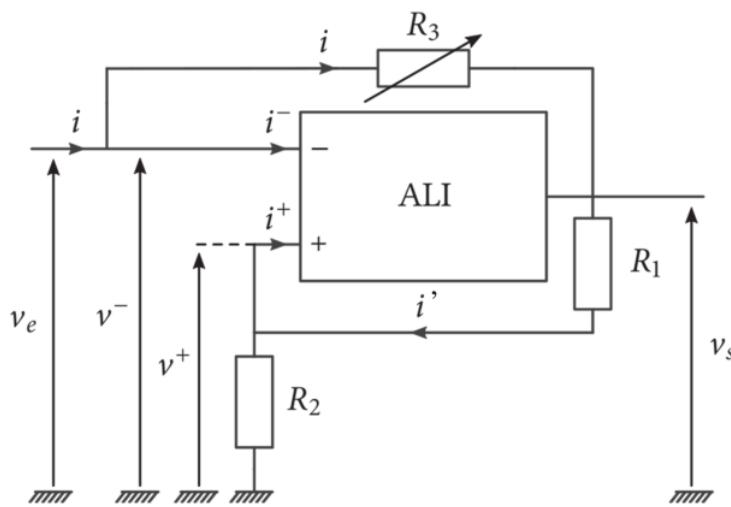


FIGURE 17 – Montage à résistance négative.

- 38) Sachant que le fonction de l'ALI est telle que $i^- = 0$, déterminer la relation liant v_e , v_s , R_3 et i .

Correction

Loi d'Ohm pour la résistance variable : $v_e - v_s = R_3 i$

- 39) Sachant que le fonction de l'ALI est telle que $i^+ = 0$ et que $v^+ = v^-$, déterminer la relation liant v_e , v_s , R_1 et R_2 .

Correction

Pont diviseur de tension (avec $v^+ = v_e$) :

$$v_e = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v_s$$

40) En déduire que l'on peut écrire $v_e = R_n i$, où R_n est une grandeur négative homogène à une résistance, que l'on exprimera en fonction de R_1 , R_2 et R_3 .

Correction

En combinant les deux relations précédentes, il vient :

$$v_e = R_3 i + v_s = R_3 i + \frac{R_1 + R_2}{R_2} v_e \Rightarrow v_e \left(1 - \frac{R_1 + R_2}{R_2}\right) = R_3 i \Rightarrow v_e = R_n i \quad \text{avec : } R_n = -\frac{R_2 R_3}{R_1}$$

III.2.b) Circuit oscillateur de référence

On étudie maintenant le circuit constitué de l'association des deux circuits précédents (figures 14 et 17), dont le schéma est représenté sur la figure 18.

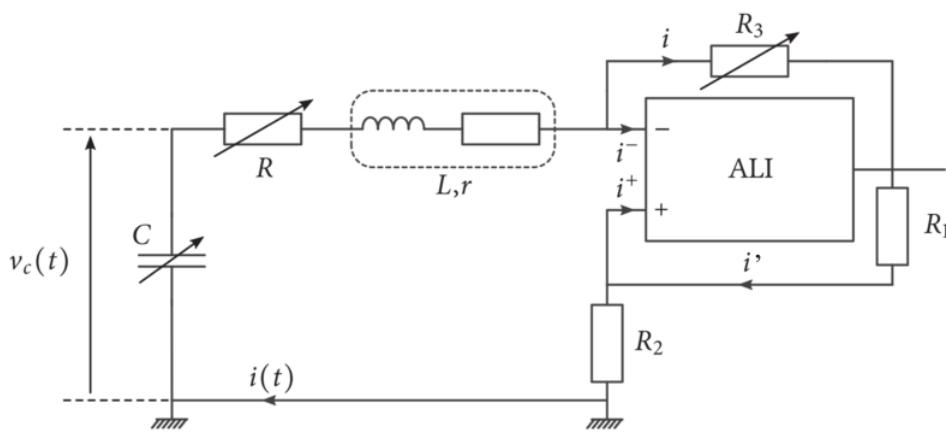


FIGURE 18 – Circuit oscillateur

41) Montrer que l'équation différentielle satisfaite par l'intensité $i(t)$ du circuit de l'oscillateur se met sous la forme :

$$\frac{d^2i}{dt^2} + 2\lambda\omega_0 \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i(t) = 0 \quad \text{avec : } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{R + r + R_n}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

Correction

La loi des mailles s'écrit :

$$v_c = (R + r + R_n) i + L \frac{di}{dt} \quad \text{avec : } i = -C \frac{dv_c}{dt}$$

car le condensateur est en convention générateur...

Ce qui donne bien l'expression demandée.

42) Déterminer la valeur de R_n qui conduit à des oscillations purement harmoniques non amorties. Quelle est la source d'énergie permettant de compenser l'effet Joule présent dans les résistances du montage ?

Correction

Pour avoir des oscillations non amorties (OH), il faut annuler le terme d'ordre 1, donc $\lambda = 0$ soit : $R_n = -(R + r)$

La source d'énergie du montage provient de l'alimentation (polarisation) de l'ALI par deux générateurs de tension continue.